Sia $\mathbb{K}^n$ sp. vettoriale su $\mathbb{K}$ di dimensione $n$

$$(\mathbb{K}^n)^n \approx \mathbb{K}^{n,n}$$

$$\det : \begin{cases} \mathbb{K}^{n,n} \longrightarrow \mathbb{K} \\ M \to \det(M) \end{cases}$$

1) $\det$ è $n$-multilineare alternante nelle colonne di $M$

2) $\det(I_n) = 1$

□

DALLA DEFINIZIONE DISCENDONO LE SEGUENTI PROPRIETÁ

OPERAZIONI FONDAMENTALI

1) Se $M'$ = matrice ottenuta scambiando 2 colonne di $M$ $\quad M' = M_{(i,j)}$

$\Rightarrow \det(M') = -\det(M)$

2) Se $M'$ = matrice ottenuta moltiplicando una colonna di $M$ per $\alpha \in \mathbb{K}$ $\quad M' = M_{(\alpha;i)}$

$\Rightarrow \det(M') = \alpha \det(M)$

3) Se $M'$ = matrice ottenuta sommando ad una colonna di $M$ una c.lineare delle rimanenti $\quad M' = M_{(\alpha_1 \cdots \alpha_n \to i)}$

$\Rightarrow \det(M') = \det(M)$

**Teorema:** Sia $M$ una matrice tale che le sue colonne siano una base di $\mathbb{K}^n$ $\Rightarrow$ esiste una sequenza di trasformazioni elementari che porta la matrice $M$ nella matrice identica.

$$\det(M) = \underbrace{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}_{\text{valori associati alle trasf. elem. che portano } M \text{ in } I} \det(I)$$

→ ELIMINAZIONE GAUSSIANA

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ \vdots & & & \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix}$$

$t = 1$

$M$

se $m_{11} = 0 \Rightarrow \exists\, i$ tale che $m_{1i} \neq 0$

[se $\forall i \; m_{1i} = 0 \Rightarrow$ la colonna di $M$ sono contenute nel sottospazio di $\mathbb{K}^n$ di equazione $x_1 = 0 \Rightarrow$ NON SAREBBERO UNA BASE DI $\mathbb{K}^n \Rightarrow$ SAREBBERO LEGATE $\Rightarrow \det(M) = 0$ ]

Scambiamo la colonna $i$ con la colonna $1$ e poniamo $t \leftarrow -t$

$$\begin{bmatrix} m_{11} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & & \vdots \\ \vdots & & \\ m_{m1} & & m_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{con } m_{11} \neq 0$$

$\Rightarrow$ le $c_1$ colonne sono una base di $\mathbb{K}^n$

$$\Rightarrow \bar{e}_1 = a_{11} c_1 + \dots + a_{m1} c_n \quad \text{con } a_{11} \neq 0$$

$$\Rightarrow c_1 = a_{11}^{-1}(\bar{e}_1 - a_{12} c_2 \dots - a_{n1} c_n)$$

$$\det[M] = \det[c_1 \dots c_n] = \det[\square\, c_2 \dots c_n] =$$

$$= \det[a_{11}^{-1}\bar{e}_1\, c_2 \dots c_n] =$$

$$= a_{11}^{-1} \det[\bar{e}_1\, c_2 \dots c_n]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & m_{m2} & & m_{mn} \end{bmatrix}$$

$$t \leftarrow a_{11}^{-1} t$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & M & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

$t \leftarrow t$

Somma ad ogni colonna $i>1$ $\quad -m_{1i}\bar{e}_1$

prosegue ora con $c_2$ ed $\bar{e}_2$

→ scrivo $\bar{e}_2$ come c. lineare delle colonne $c_2 \dots c_n$

→ mi ricerco a meno di scambi che $m_{22} \to a_{22}$

$$\bar{e}_2 = a_{22}c_2 + \dots + a_{2n}c_n$$

sia $\neq 0 \Rightarrow$ sostituisco $c_2$ con $\bar{e}_2$

tenendo traccia in $t$ $\longrightarrow$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & & \end{bmatrix}$$

Dopo $n$ PASSI abbiamo

$t = \det(M)$

e la matrice $M$ è stata trasformata nella matrice identica.

I Teorema di Laplace.

Sia $(a_{11}) \in \mathbb{K}^{1,1} \Rightarrow \det(a_{11}) = a_{11}$

Sia ora $M \in \mathbb{K}^{n,n} \Rightarrow$

$$\forall_{j=1\dots n} : \det(M) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} m_{ij} \det(M_{ij}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} m_{ij} \det(M_{ij})$$

ove $M_{ij}$ = matrice ottenuta da $M$ cancellando la $i$-esima riga e $j$-esima colonna.

DIM: $\det(I_n)=1$ e la funzione è multilineare alternante $\square$

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$\forall\, M \in \mathbb{K}^{n,n}$: $\det(M) = \det(M^T)$.

CONSEGUENZA:

Sia $M \in \mathbb{K}^{n,n}$ $\Rightarrow$ le colonne di M sono una base di $\mathbb{K}^n$

$\Updownarrow$

le righe di M sono una base di $\mathbb{K}^n$

→ calcolare il det. per colonne o per righe è indifferente.

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

CALCOLARE $\det(M)$ con GAUSS richiede

$n$ operazioni su $n$ colonne

$M \in \mathbb{K}^{n,n}$

→ GROSSOMODO $\mathcal{O}(n^2)$ operazioni.

CALCOLARE $\det(M)$ con LAPLACE $M \in \mathbb{K}^{n,n}$

RICHIEDE CALCOLARE

$n$ DETERMINANTI DI

MATRICI $(n-1)\times(n-1)$

↓

OGUNO $(n-1)$

DET DI MATRICI

$(n-2)\times(n-2)$

⋮

→ # totale di operazioni $\mathcal{O}(n!)$

In generale conviene sempre l'algoritmo di Gauss (o varianti ancora più ottimizzate) se le entrate della matrice sono note.

→ Conviene usare Laplace quando la matrice dipende da parametri e/o è piccola!

<u>Oss:</u> Una matrice invertibile ha $\det \neq 0$
$\Leftrightarrow$ le sue colonne sono linearmente indip
$\Leftrightarrow$ esse sono una base di $\mathbb{K}^n$
$\Leftrightarrow$ esse rappresentano un cambiamento di base.

$\Leftrightarrow$ la matrice è invertibile.

$$GL(n,\mathbb{K}) := \{ M \in \mathbb{K}^{n,n} \mid M \text{ invertibile} \} =$$

$$= \{ M \in \mathbb{K}^{n,n} \mid \det(M) \neq 0 \}.$$

$\det(M) \neq 0$

$M \longrightarrow I$

si

MOLTIPLICARE LA COLONNA $i$-esima per $a$

$M \longmapsto [\,\cdots\,]$ con $P_{i,a} = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & a & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix} \leftarrow i$ (la $i$ è sulla diagonale)

$[MP_{i,a}] = [\,\cdots\,] =$

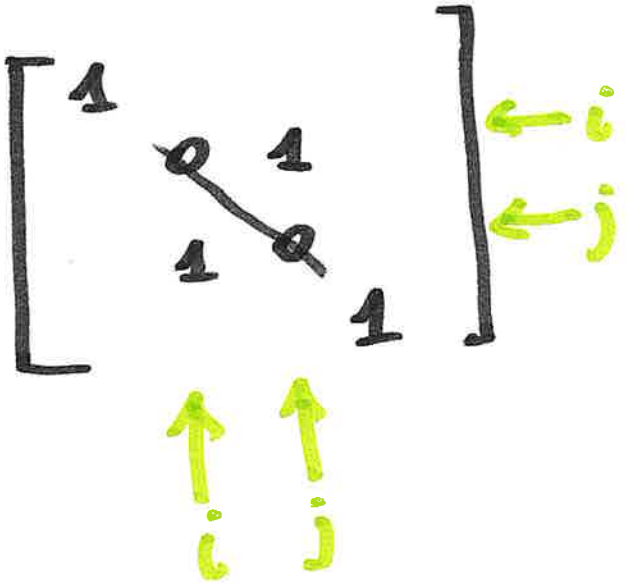
$[c_1 \dots a c_i \dots c_n]$

Scambiare la colonna i con la colonna j
in M corrisponde a moltiplicare
M per $S_{i,j}$

$M \longrightarrow$ [illegible]

$[E_{i,j} \cdot M]$

$[M S_{i,j}]$

$S_{i,j} =$ 


Sommare a una colonna
alla prima colonna di M la comb. lineare
$\alpha_2 C_2 + \dots + \alpha_n C_n$

# OPERAZIONI SULLE COLONNE.

$$M = [C_1 \dots C_i \dots C_n]$$

1) Moltiplicare $C_i$ per $a$

$$M \to M P_{i,a} \quad \text{ove} \quad P_{i,a} = \begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & a & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{bmatrix} \leftarrow i$$

$\uparrow$ i

2) Scambiare $C_i$ con $C_j$

$$M \to M S_{i,j} \qquad S_{i,j} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & 1 & \leftarrow i \\ & & & \ddots & & \\ & & 1 & & 0 & \leftarrow j \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$\uparrow$ i $\quad \uparrow$ j

Sommare a $C_1$ la comb. lineare

$$\alpha_2 C_2 + \dots + \alpha_n C_n$$

$$M \rightarrow M T_{\alpha_2 \dots \alpha_n} \quad \text{con}$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ \alpha_2 & \ddots & \\ \vdots & 0 & \\ \alpha_n & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ \vdots & & & \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ \alpha_2 & \ddots & \\ \vdots & 0 & \\ \alpha_n & & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\left[\begin{array}{l|l} m_{11}+d_2m_{12}+\dots+d_nm_{1n} & \\ m_{21}+d_2m_{22}+\dots+d_nm_{2n} & \\ \vdots & \\ m_{n1}+d_2m_{n2}+\dots+d_nm_{nn} & C_2 \dots C_n \\ \| & \\ C_1+d_2C_2+\dots+d_nC_n & \end{array}\right]$$

Le operazioni elementari sulle colonne si rappresentano mediante prodotto di matrici $P_{i,\alpha}$, $S_{i,j}$ e $T_{\alpha_2 \dots \alpha_n}$ a destra della matrice $M$.

[Se moltiplicassimo a sx stremmo
agendo sulle righe]

→ Dopo un numero finito di op. elementari
si può ricondurre una matrice $n \times n$
con $\det(M) \neq 0$ alla matrice identica.

→ Il prodotto delle opp. matrici che rappresentano
le op. elementari $O_1 O_2 \dots O_t$
è tale che $M O_1 O_2 \dots O_t = I$

$$\Rightarrow (O_1 O_2 \dots O_t) = M^{-1}$$

## RIASSUMENDO

per il calcolo dell'inversa si parte da 2 matrici

M  I

si applicano consecutivamente le op. elementari Oi che portano da M alla matrice identica sia ad M che ad I

$I = M\, O_1 O_2 \dots O_t \qquad I\, O_1 \dots O_t = M^{-1}$

ALLA FINE A DX AVETE $M^{-1}$